

# 誘導電動機の厳密線形化 及び $H^\infty$ 制御理論による補償器の設計

森田 規矩士\*<sup>1)</sup> 川田 昌克\*<sup>2)</sup> 大場 和久\*<sup>3)</sup> 井上 和夫\*<sup>4)</sup>

## 1. はじめに

FAでは多くのメカトロニクス機器が用いられているが、それらの制御ではサーボ制御技術が中核技術の一つである。従来、サーボ系の実現には直流電動機が独占的地位占めていたが、マイクロエレクトロニクスの急激な進展によるインバータの普及は、保守や耐環境性に優れた誘導電動機をサーボモータとして使用する可能性を与え、ベクトル制御法を基礎として既に産業界に定着しつつある。

よく知られているように、各種の電動機は電磁系と機械系により構成された複合的体系であり体系間のエネルギー変換固有の非線形性のため、その状態方程式は非線形システムとして記述される。誘導電動機制御の研究は、上記の強い非線形のため、その解析や制御系設計が十分になされていない。ところが近年、線形状態制御論における幾何学的アプローチをベクトル場にまで拡張した微分幾何学的手法による非線形システム制御が、次世代の状態制御法として注目を集めている。

本稿では、誘導電動機の定常一過渡両状態における高性能な「瞬時トルク制御」を実現し、ロバストなサーボ系を構成することを目的としている。そのため、まず微分幾何学的手法による非線形システム制御の観点から誘導電動機のベクトル制御を検討し、近似によらない線形化手法（厳密線形化）を用いて状態方程式の線形化を行う。さらにロバスト制御手法としての注目されている  $H^\infty$  制御理論を厳密線形化状態方程式に適用して、ロバストなサーボ系の構成を行う。本稿の一部は既に報告<sup>1)</sup>されているが、ここでは全般的な記述を行う。

本稿の構成は以下のようになっている。2章で定常一過渡両状態で高性能な「瞬時トルク」を実現するための基本状態方程式に言及し、3章で微分幾何学的手法に基

づく厳密線形化手法を基本状態方程式に適用する。4章では、得られた厳密線形化状態方程式をもとに  $H^\infty$  制御理論を適用し、外乱（負荷トルク）、パラメータ変動（特に2次抵抗の変動）に対してロバストな制御系を設計する。5章で計算シミュレーションを実施し、検証を行うと共に今後の問題点を探る。本稿は紙面の制約があるため、詳細な原理的説明や記述、具体的な計算等は省略せざるを得なくなったことをお許し願いたい。

## 2. 誘導電動機の数学モデル

誘導電動機のベクトル制御は、1次電流ベクトルを2次鎖交磁束に平行な成分と直交する成分に分離して、これを独立して制御することにより高性能な「瞬時トルクの制御」を目指したものである。最近ではセンサレスで「すべり周波数 (slip frequency)」を演算で求め、磁束の大きさと位置を推定する「すべり周波数ベクトル制御」が主流である。この方法では、1次回転磁界と2次側の回転磁界とが定常一過渡状態において同期していることが前提となっているが、必ずしもその保証はない。このため、同期回転速度で回転する座標軸を磁束座標軸に一致させる制御を行うことにより、1次電流のトルク成分電流と磁束成分電流を定常一過渡状態に関わらず独立に制御するベクトル制御系の構成方法<sup>2),3)</sup>が提案されている。

文献2)の方法は定常一過渡両状態で高性能な「瞬時トルクの制御」という本稿の目的に合致しているため、このモデルを使用する。すなわち、1次角周波数  $\omega_1$  で回転する  $d$ - $q$  座標軸上で考えた誘導電動機の状態方程式を以下のように記述する。

$$\frac{d}{dt} \omega_r = -\frac{B}{J} \omega_r + \frac{3pm}{2J} (i_{md} i_{1q} - i_{mq} i_{1d}) - \frac{T_L}{J} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} i_{md} = -\frac{r_2}{L_r} i_{md} + \omega_s i_{mq} + \frac{r_2 M}{L_r^2} i_{1d} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} i_{mq} = -\frac{r_2}{L_r} i_{mq} - \omega_s i_{md} + \frac{r_2 M}{L_r^2} i_{1q} \quad (3)$$

\* 1) 商品企画部

\* 2) 立命館大学理工学部情報工学科修士課程

\* 3) 大阪工業大学工学部電子工学科講師

\* 4) 立命館大学理工学部情報工学科教授

$$\frac{d}{dt} i_{1d} = -\frac{M r_2}{l L_s} + \frac{M L_r}{l L_s} \omega_r i_{md} - \frac{R L_r}{l L_s} i_{1d} + \omega_1 i_{1d} + \frac{L_r}{l L_s} v_{1d} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} i_{1q} = -\frac{M r_2}{l L_s} - \frac{M L_r}{l L_s} \omega_r i_{mq} - \frac{R L_r}{l L_s} i_{1q} + \omega_1 i_{1q} + \frac{L_r}{l L_s} v_{1q} \quad (5)$$

ただし

$$R = r_1 + r_2 \left( \frac{M}{L_r} \right)^2, \quad l = \frac{L_s L_r - M^2}{L_s}$$

であり、 $\omega_r$ : 2次角速度、 $i_{md}$ : 磁束成分電流の  $d$ -軸成分、 $i_{mq}$ : 磁束成分電流の  $q$ -軸成分、 $i_{1d}$ : 1次電流の  $d$ -軸成分、 $i_{1q}$ : 1次電流の  $q$ -軸成分、 $B$ : 制動係数、 $J$ : 慣性モーメント、 $p$ : 極対数、 $r_1$ : 1次抵抗、 $r_2$ : 2次抵抗、 $L_s$ : 1次自己インダクタンス、 $L_r$ : 2次自己インダクタンス、 $M$ : 相互インダクタンス、 $\omega_s (= \omega_1 - \omega_r)$ : すべり周波数、 $T_L$ : 負荷トルク、 $v_{1q}$ : 1次電圧の  $d$ -軸成分、 $v_{1d}$ : 1次電圧の  $q$ -軸成分である。

(1)~(5)式において入力、状態変数を

$$u = [u_1, u_2, u_3]^T = [v_{1d}, v_{1q}, \omega_1]^T,$$

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [i_{md}, i_{mq}, i_{1d}, i_{1q}, \omega_r]^T$$

とすると、(1)~(5)式は以下のように書き換えることができる。

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^3 g_i(x) u_i + d,$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_2 x_5 - x_3 x_4) \\ -m_1 x_2 - x_1 x_3 + m_2 x_4 \\ -m_1 x_3 + x_1 x_2 + m_2 x_5 \\ L_1 x_3 + L_2 x_1 x_3 - L_3 x_4 \\ L_1 x_3 - L_2 x_1 x_2 - L_3 x_5 \end{bmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ L_4 \end{bmatrix},$$

$$g_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_5 \\ -x_4 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -T_L/J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{B}{J}, \lambda_2 = \frac{3pM}{2J}, m_1 = \frac{r_2}{L_r}, m_2 = \frac{r_2 M}{L_r^2}, L_1 = \frac{r_2 M}{l L_s}, L_2 = \frac{M L_r}{l L_s}, L_3 = \frac{R L_r}{l L_s}, L_4 = \frac{L_r}{l L_s} \quad (6)$$

ただし  $d$  は外乱とみなし、負荷トルクは簡単のため定数と仮定する。(6)式の状態方程式はアフィン非線形システムであり、以後の考察のための基礎状態方程式である。

### 3. 非線形システムの厳密線形化

#### 3.1 厳密線形化

本稿では、従来よく用いられて来た近似的な線形化手法ではなく、微分幾何学的基礎に基づいた線形化手法(厳密線形化)を用いて線形化する。厳密線形化では、非線形状態方程式の右辺をベクトル場と考えたときにベクトル場間に成立するインボリュートイブな関係を利用し、完全積分可能性を根拠として偏微分方程式を解くことにより非線形状態変換を求める(状態線形化)。このような厳密な関係が成立するのは非常に限られたクラスであるが、適切な非線形変換が見つければ線形化が可能である。入力-出力線形化では、出力関数を適切に選択すれば上述の厳密線形化が可能となる。本稿での線形化の特徴を以下に示す。

- (a) 外乱項を含んだ多入出力システムを線形化する。
- (b) サーボ系構成目的のため、入力-出力線形化手法を適用する。
- (c) 非線形フィードバックをできるだけ単純化する。

まず、入出力数が等しいような以下の非線形状態方程式及び出力方程式を考える。

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i + d \quad (7)$$

$$y = h(x) \quad (8)$$

ただし  $u \in R^m$  は入力、 $y \in R^m$  は出力、 $x \in R^n$  は状態、 $d \in R^n$  は外乱である。また、 $n$ 次元ベクトル関数  $f(x)$ 、 $g_i(x)$  及び  $m$ 次元ベクトル関数  $h(x)$  は  $C^\infty$  (無限回微分可能)で、 $f(0) = 0$  とする。(6)式は(7)式において  $n = 5$ 、 $m = 3$  の場合である。

微分幾何学的アプローチでは  $f(x)$ 、 $g_i(x)$  をベクトル場と見なすことにより考察するが、 $x \in R^n$  上の接ベクトル空間の標準基底

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \mid i = 1, \dots, n \right\}$$

を用いると、例えば  $f(x)$  は以下のように記述される。

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (9)$$

ここで、 $f_i(x)$  はベクトル場の成分であり(7)式の対応する成分を表している。非線形システムでは、「曲がった空間」上で考察するため、局所的かあるいは大域的かに注意が必要となることである。

以後の解析と設計には、リ-微分と相対次数(relative degree)の概念が重要となるため、簡単に定義する。

《リ-微分 (ベクトル場に沿っての微分)》<sup>4)</sup>

リ-微分とは次式で定義される。

$$L_f h_i(x) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} f_j(x) \quad (i=1, \dots, m) \quad (10)$$

ここで,  $f_j(x)$  はベクトル場の成分である。

また, リ-微分は次の性質を持っている。

$$L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h) \quad (11)$$

《相対次数》<sup>4)</sup>

出力関数  $y_i = h_i(x)$  に対して相対次数  $r_i$  を定義する。相対次数とは, 次式を満たす最小の整数である。

$$(a) L_g L_f^{k_i} h_i$$

$$= [L_{g_1} L_f^{k_i} h_i, L_{g_2} L_f^{k_i} h_i, L_{g_3} L_f^{k_i} h_i] \quad (k_i < r_i - 1) \quad (12)$$

$$(b) L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i \neq 0$$

$$(i=1, \dots, m, j=1, \dots, m) \quad (13)$$

$$(c) r_1 + r_2 + r_3 = n \quad (14)$$

(7)式の形式で, 初期状態  $x(0) = x_0$  ( $x_0 = 0$  でもよい) をもつ非線形システムは, 非線形状態座標変換

$$z = T(x), T(0) = 0 \quad (15)$$

が, 次の線形時不変状態方程式

$$\dot{z} = Az + Bv + \xi \quad (16)$$

を満足するような

$$(a) x=0 \text{ を含む } R^n \text{ の部分集合 } U \quad (0 \in U \subset R^n)$$

$$(b) \text{ 微分同形写像 } T(x), T(x) : U \rightarrow R^n$$

$$(c) \text{ 非線形状態フィードバック } u :$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (17)$$

(ただし  $\beta(x)$  は  $x=0$  で正則)

$$(d) x \text{ とは独立したパラメータ } \xi$$

が存在するなら, フィードバック線形化可能であるという<sup>4)</sup>。

(8)式において  $d=0$  のとき, フィードバック線形化可能であるための必要十分条件は, 次のように記述される。

《入力-出力線形化条件 ( $d=0$  の場合)》<sup>7)</sup>

ベクトル場から構成された行列のランクが

$$\text{rank } g(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)] = m \quad (18)$$

であると仮定する。 $d=0$  の場合, 非線形システムが厳密線形化可能であるとは(7), (8)式が  $x_0$  での任意の相対次数  $r_i$  に対して  $r_1 + \dots + r_m = n$  なる関係をもち,

$$(a) x_0 \text{ の近傍 } U,$$

$$(b) m \text{ 個の実数値関数 } h_i(x) \quad (i=1, \dots, m)$$

が存在することである。

このとき,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = E(x) + D(x)u, \quad (19)$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{bmatrix},$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{bmatrix}$$

であるから, 非線形フィードバック制御則と状態変数変換は以下のように実現できる。

$$(a) \text{ 非線形状態フィードバック制御則}$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

$$\alpha(x) = -D^{-1}(x)E(x), \quad \beta(x) = D^{-1}(x) \quad (20)$$

$$(b) \text{ 状態変数変換}$$

$$z = T(x)$$

$$= [z_{11}, \dots, z_{1r_1}, z_{21}, \dots, z_{2r_2}, z_{31}, \dots, z_{3r_3}]^T$$

$$= [h_1, \dots, L_f^{r_1-1} h_1, h_2, \dots, L_f^{r_2-1} h_2, \dots, h_3, \dots, L_f^{r_3-1} h_3]^T,$$

$$T(0) = 0 \quad (21)$$

(7)式の非線形システムと線形化システムの関係を図1に示す。線形化されたシステムは Brunovsky 正準形式と呼ばれ,

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

$$A = \text{diag}[A_1, A_2, A_3], B = \text{diag}[b_1, b_2, b_3],$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}$$

$$b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{1 \times r_i} \quad (22)$$

となる。

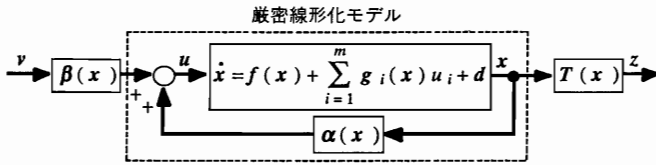


図1 厳密線形化

さて、(6)式のように、 $d \neq 0$  の場合に入力-出力線形化することが本稿の一つの目的であるが、それが可能であるための条件は次のように記述できる。

《入力-出力線形化条件 ( $d \neq 0$  の場合)》<sup>5)</sup>

- (a)  $d = 0$  の場合のシステムが厳密線形化可能である
- (b)  $L_d L_f^k h_i(x) = 0, (k = 0, \dots, r_i - 2, i = 1, \dots, m)$
- (c)  $L_d L_f^{r_i - 1} h_i(x)$  は  $x$  と独立している

これらを集約すると、入力-出力線形化の手順が次のように得られる。

- Step 1) (6)式に対する適切な相対次数をもつ出力関数を見い出す。
- Step 2) 出力関数を非線形変換と見ることにより微分同形関係を用い、 $d = 0$  の場合の(8)式の左辺を実行する。
- Step 3) 適切な非線形フィードバック(17)式を構成し、Brunovsky 標準形である(16)式に帰着させる。

### 3.2 入力-出力線形化と制御目的

(6)式に対して、入力-出力線形化手順に基き計算を実施する。

Step 1)

(6)式は  $x_2 \neq 0$  なら  $\text{rank } g(x) = 3$  であるから、入力-出力線形化条件の仮定は満たされている。相対次数は(6)、(12)~(14)式より  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 2$  である。また、ベクトル制御、速度制御のための制御目的は以下のようである。

[制御目的]

$$x_2 \equiv i_{md} \rightarrow \dot{i}_{md}, \quad x_3 \equiv i_{mq} \rightarrow \dot{i}_{mq} = 0 \quad (\text{ベクトル制御})$$

$$x_1 \equiv \omega_r \rightarrow \dot{\omega}_r \quad (\text{速度制御})$$

ここで、 $\dot{i}_{md}, \dot{i}_{mq}, \dot{\omega}_r$  は  $i_{md}, i_{mq}, \omega_r$  の目標値である。制御目的を達成するために出力関数を以下のように選択する。

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_3 \\ y_2 = h_2(x) = x_2^2 + x_3^2 \\ y_3 = h_3(x) = x_1 \end{cases} \quad (23)$$

Step 2)

(6)式を考慮して  $y_1$  を時間に関して微分すると、リ-微分 の定義を用いて次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= L_f h_1 + L_{g_1} h_1 u_1 + L_{g_2} h_1 u_2 + L_{g_3} h_1 u_3 + L_d h_1 \\ &= -m_1 x_3 - x_1 x_2 + m_2 x_5 - x_2 u_3 \end{aligned} \quad (24)$$

(24)式の場合は1回の時間微分で入力が陽に現れたが、もし現れなければ入力が陽に現れるまで微分を実行すればよい。すなわち相対次数分だけ微分すればよい。(24)式と同様にして  $y_2, y_3$  を時間微分し、次式に書き換える。

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = E(x) + D(x)u + \xi,$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_f h_1 \\ L_f h_2 \\ L_f h_3 \end{bmatrix},$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{g_3} L_f h_1 \\ L_{g_1} L_f h_2 & L_{g_2} L_f h_2 & 0 \\ L_{g_1} L_f h_3 & L_{g_2} L_f h_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda_1 T_L}{J} \quad (25)$$

Step 3)

入力ベクトルに掛かるマトリクス  $D(x)$  は、 $x_2 \neq 0$  なら非特異となり、 $D^{-1}(x)$  が存在する。そこで  $u$  を(20)式で表し、(25)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = v + \xi \quad (26)$$

ただし  $v = [v_1, v_2, v_3]^T$  は新しい入力ベクトルである。非線形状態変換を(20)式と同様に

$$\begin{aligned} z &= [z_1, z_{21}, z_{22}, z_{31}, z_{32}]^T \\ &= [h_1, h_2, L_f h_2, h_3, L_f h_3]^T \\ &= [y_1, y_2, \dot{y}_2, y_3, \dot{y}_3]^T \end{aligned} \quad (27)$$

とすると (ただし  $z_{11}$  は  $z_1$  と簡略化した) (28)式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{h}_1 = \dot{z}_1 = v_1, \\ \dot{y}_2 &= \dot{h}_2 = \dot{z}_{21} = z_{22} = L_f h_2, \\ \dot{z}_{22} &= v_2, \\ \dot{y}_3 &= \dot{h}_3 = \dot{z}_{31} = z_{32} = L_f h_3, \\ \dot{z}_{32} &= v_3 + \frac{\lambda_1 T_L}{J} \end{aligned} \quad (28)$$

(28)式をマトリクス形式に書き直すと、(16)式と等価になることがわかる。

しかしながら(20)式は極めて複雑な式となり、リアルタイムで演算を行うのが困難である。その上、確かに(22)式は可制御、可観測な形になっているが、線形化された状態方程式でパラメータ変動の補正が困難となる。このため I. J. Ha らによって提案された手法<sup>6)</sup>を用いて、デカップリング制御則である(20)式を単純化し、線形化された状態方程式でパラメータ変動の補正をするのに有効とされるロバストな制御系を構成する。その方法とは、(20)式の制御則を

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= -D^{-1}(x)(\eta(z) - E(x)), \\ \beta(x) &= D^{-1}(x), \\ \eta &= [\eta_1, \dots, \eta_m]^T\end{aligned}\quad (29)$$

のように修正することにある。ここで  $\eta$  は

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{r_i} a_{ik} z_{ik} = \sum_{k=1}^{r_i} a_{ik} L_f^k h_i(x) \quad (i=1, \dots, m) \quad (30)$$

であり、 $a_{ik}(k=1, \dots, r_i)$  は任意の定数とする。この方法を用いるためには、 $u$  と  $v$  の関係ができる限り簡単になるようにパラメータ  $a_{ik}$  を決めればよい。すなわち、 $\phi = \eta - E$  が簡単になるようにパラメータを決める(共通項を見つけ、共通項で集約し、その共通項の係数が零となるように  $a_{ik}$  を決める)。

(6)式の場合、

$$\begin{cases} a_1 = a_{11} = m_1 \\ a_{21} = 2(m_1^2 + m_1 L_3 - m_2 L_1) \\ a_{22} = 3m_1 + L_3 \\ a_{31} = \lambda_1(m_1 + L_3) \\ a_{32} = \lambda_1 + m_1 + L_3 \end{cases} \quad (31)$$

となる。したがって以下のような厳密線形化モデルを得ることができる。

$$\dot{z}_1 = -a_1 z_1 + v_1 \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{31} \\ \dot{z}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{31} & -a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{31} \\ z_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda_1 T_L}{J} \quad (34)$$

このとき、(29)式より

$$u = \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} 0 & -L_4 \lambda_2 x_2^2 \\ 0 & -L_4 \lambda_2 x_2 x_3 \\ 2m_2 L_4 \lambda_2^2 (x_2^2 + x_3^2) & 0 \\ 2m_2 L_4 x_2 x_3 \\ -2m_2 L_4 x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 + v_1 \\ \phi_2 + v_2 \\ \phi_3 + v_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = -x_1 x_2 - m_2 x_5 \\ \phi_2 = -2m_2 x_1 (x_2 x_5 - x_3 x_4) - 2m_2^2 (x_4^2 + x_5^2) \\ \phi_3 = \lambda_1 x_1 (x_2 x_4 + x_3 x_5) + L_2 \lambda_2 x_1 (x_2^2 + x_3^2) \end{cases} \quad (36)$$

$$\det D = -2m_2 L_4^2 \lambda_2 x_2 (x_2^2 + x_3^2) \quad (37)$$

となる。(37)式より  $D^{-1}$  が存在するためには、 $x_2 \neq 0$  でなければならない。また、出力方程式を新しい状態変数を用いて書き換えると、次式ようになる。

$$y_1 = z_1, \quad (38)$$

$$y_2 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$y_3 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} z_{31} \\ z_{32} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

(32)~(34)式は3つの非干渉な線形状態方程式に完全に分離されている。

## 4. $H^\infty$ 制御理論に基づく制御系設計

### 4.1 $H^\infty$ 標準問題

近年、 $H^\infty$ 制御理論が盛んに研究されている。その理由としては以下のようなことが考えられる。

- (a) 古典制御理論と同様に周波数領域でのループ整形が系統的かつ容易に行える。
- (b) ロバスト安定化問題、感度低減化問題、混合感度問題、外乱除去問題など様々な設計仕様が統一的に扱える<sup>8)</sup>。
- (c) 制御系設計のためのツールが容易に入手可能である。

(b)を実現するために、次式で表現される一般化制御対象を考える。(以下、周波数領域で考察する)

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (41)$$

ここで、 $w$  は外部入力、 $u$  は制御入力、 $y$  は観測量、 $z$  は制御量である。制御則を

$$u = K(s)y \quad (42)$$

とし、図2で示すフィードバック制御系を構成すると、 $w$  から  $z$  への伝達関数  $G_{zw}(s)$  は

$$z = G_{zw} w,$$

$$G_{zw} = G_{11} + G_{12} K (I - G_{22} K)^{-1} G_{21} \quad (43)$$

となる。このとき、 $H^\infty$ 標準問題とは、正数  $\gamma > 0$  が与えられたとき

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (44)$$

を満足する安定化補償器  $K(s)$  を求める問題である。ただし、 $H^\infty$ ノルムとは安定かつプロパな伝達関数  $\Phi(s)$  に対して

$$\|\Phi\|_\infty = \sup_\omega \|\Phi(s)\| \quad (45)$$

で表される。右辺のノルムは、多入出力系のときには最大特異値であり、1入出力系のときにはユークリッドノルムである。

#### 4.2 誘導電動機の厳密線形化モデルへの適用

##### 4.2.1 設計仕様

$H^\infty$ 制御理論は様々な設計仕様を  $H^\infty$ 標準問題に帰着させることにより統一的に扱えるのであるが、制御系の性能はどのような制御仕様を選択するかによって依存している。ここでは、誘導電動機の制御のためにどのような設計仕様を選択すべきかについて述べる。

誘導電動機は、温度上昇のため2次抵抗が数10%も変動し、他の各パラメータも同定誤差を含むと考えられる。また、補償器をデジタル計算機で実装すると演算時間がむだ時間として現れる。これらの不確かさに対して制御系を低感度にし、しかも安定性を保つことは重要である。さらに負荷トルクが制御対象の入力側の外乱として現れているため、負荷トルクが出力に与える影響を小さく抑える必要がある。以上の観点から設計仕様を

- i) パラメータが変動し、また演算時間によるむだ時間が生じても制御系の安定性を保つ(ロバスト安定化)
- ii) 制御対象の不確かさに対する感度を低くし(低感度化)、外乱  $T_L$  が出力に与える影響を抑える

とする。i), ii)の仕様を満足する安定化補償器を求める問題を混合感度問題という。

##### 4.2.2 ロバスト安定化

各パラメータが公称値の場合、(32)~(34)式より制御系のブロック線図は図3のようになる。ただし、 $P_i (i=1, 2,$

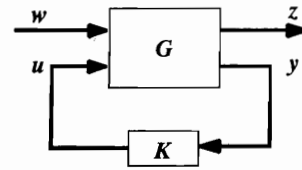


図2 一般化制御対象

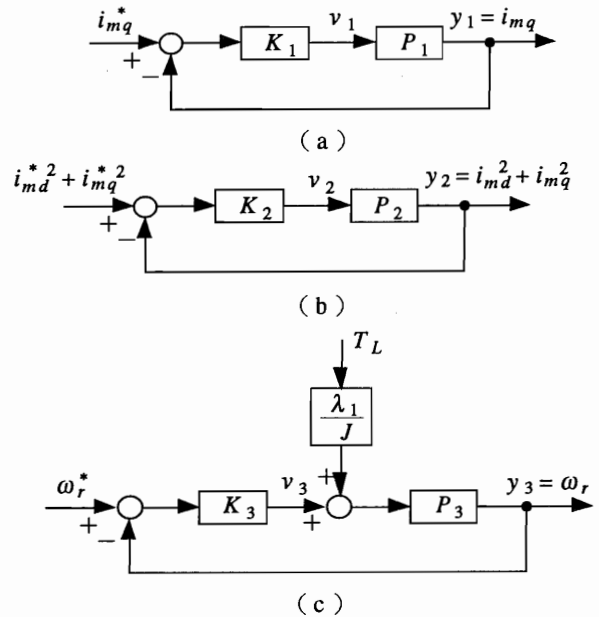


図3 フィードバック制御系(公称値)

3)は  $z$  の初期状態を0と仮定したときの、 $v_i$  から  $y_i$  への伝達関数

$$P_1 = \frac{1}{s + a_1} \quad (46)$$

$$P_2 = \frac{1}{s^2 + a_{22}s + a_{21}} \quad (47)$$

$$P_3 = \frac{1}{s^2 + a_{32}s + a_{31}} \quad (48)$$

であり、 $K_i$ は補償器である。パラメータ変動などにより  $P_i$ が

$$P_i' = (1 + \delta_{P_i}) P_i \quad (49)$$

と変動した(乗法的変動)とき

$$\|\delta_{P_i}\|_\infty < |W_{T_i}(j\omega)| \quad (50)$$

を満足する  $W_{T_i}$  が既知であるならば、ロバスト安定化のための必要十分条件は以下のようである。

《ロバスト安定化のための必要十分条件》

$$\|W_{T_i} T_i\|_\infty < 1, \quad T_i = \frac{P_i K_i}{1 + P_i K_i} \quad (51)$$

を満足する安定化補償器ならば、(51)式を満足する全ての変動に対応する  $P_i'$  を安定化する。

以上より、ロバスト安定化を達成するため、 $W_{T_i}$  を求

める必要がある。そこで、まず、各パラメータが公称値と異なる場合を考える。以下では  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $d$ ,  $E(x)$ ,  $D(x)$ ,  $\xi$  がパラメータ変動によりそれぞれ  $f'(x)$ ,  $g_i'(x)$ ,  $d'$ ,  $E'(x)$ ,  $D'(x)$ ,  $\xi'$  となったとする。パラメータが変動した場合、誘導電動機の状態方程式(6)式より

$$\dot{x} = f'(x) + \sum_{i=1}^3 g_i'(x) u_i + d' \quad (52)$$

となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = E'(x) + D'(x) u + \xi' \quad (53)$$

となる。これに入力の非線形フィードバックである(9)式を施すと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} &= E'(x) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & b_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 + v_1 \\ \phi_2 + v_2 \\ \phi_3 + v_3 \end{bmatrix} + \xi' \\ &= \begin{bmatrix} H_1 + v_1 \\ H_2 + b_2' v_2 \\ H_3 + b_3' v_3 \end{bmatrix} + \xi' \end{aligned} \quad (54)$$

ただし、

$$\begin{aligned} H_1 &= E_1' + \phi_1 + v_1, H_2 = E_2' + b_2'(\phi_2 + v_2), \\ H_3 &= E_3' + b_3'(\phi_3 + v_3), b_2' = \frac{m_2' L_4'}{m_2 L_4}, b_3' = \frac{L_4' \lambda_2'}{L_4 \lambda_2} \end{aligned}$$

新しい状態  $z$  は(17)式で表されるため、(54)式より以下のような状態方程式が得られる。

$$\dot{z}_1 = -a_1' z_1 + v_1 + k_1 \Delta_1(x) \quad (55)$$

$$a_1' = m_1', k_1 = m_2' - m_2, \Delta_1(x) = x_5$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{21}' & -a_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2' \end{bmatrix} v_2 \quad (56)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ k_{21} \end{bmatrix} \Delta_{21}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{22} \end{bmatrix} \Delta_{22}(x)$$

$$a_{21}' = 2(m_1'^2 + m_1' L_3' - m_2' L_1'),$$

$$a_{22}' = 3m_1' + L_3', k_{21} = \frac{2m_2'}{L_4}(L_4 - L_4'),$$

$$k_{22} = \frac{2m_2'}{L_4}(m_2' L_4 - m_2 L_4'),$$

$$\Delta_{21} = x_1(x_2 x_5 - x_3 x_4), \Delta_{22} = x_4^2 + x_5^2$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_{31} \\ \dot{z}_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{31}' & -a_{32}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{31} \\ z_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_3' \end{bmatrix} v_3 \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ k_{31} \end{bmatrix} \Delta_{31}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{32} \end{bmatrix} \Delta_{32}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{33} \end{bmatrix} T_L \end{aligned} \quad (57)$$

$$a_{31}' = \lambda_1'(m_1' + L_3'), a_{32}' = \lambda_1' + m_1' + L_3',$$

$$k_{31} = \frac{\lambda_2'}{L_4}(L_4 - L_4'),$$

$$k_{32} = \frac{\lambda_2'}{L_4}(L_2 L_4' - L_2' L_4), k_{33} = \frac{\lambda_1'}{J'},$$

$$\Delta_{31} = x_1(x_2 x_4 + x_3 x_5), \Delta_{32} = x_1(x_2^2 + x_3^2)$$

ただし  $m_1'$ ,  $m_2'$ ,  $\lambda_1'$ ,  $\lambda_2'$ ,  $L_1'$ ,  $L_2'$ ,  $L_3'$ ,  $L_4'$  は  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  が変動したものである。(55)~(57)式より、各パラメータが変動した場合の厳密線形化モデルは  $\Delta = [\Delta_1, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{31}, \Delta_{32}]^T$  を制御対象の入力側の外乱とみなすことにより線形性を保ち、かつ入出力が非干渉であることがわかる。

$\Delta$  を無視すると、各パラメータが変動し、むだ時間  $\tau$  を生じたときの  $P_i'$  はそれぞれ

$$P_1' = e^{-\tau s} \frac{1}{s + a_1'} \quad (58)$$

$$P_2' = e^{-\tau s} \frac{b_2'}{s^2 + a_{22}'s + a_{21}'} \quad (59)$$

$$P_3' = e^{-\tau s} \frac{b_3'}{s^2 + a_{32}'s + a_{31}'} \quad (60)$$

となる(図4)。また、 $\Delta$  を有限値と仮定すると、(46)~(48)、(58)~(60)式を用いてパラメータ変動、むだ時間に対しロバスト安定な補償器を設計すれば  $\Delta$  によって不安定になることはない。

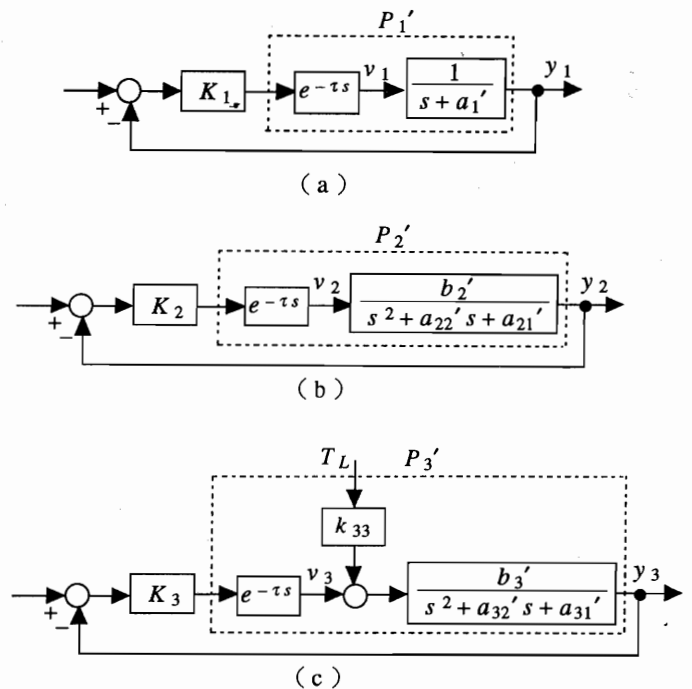


図4 フィードバック制御系  
(パラメータ変動及びむだ時間が存在)

4.2.3 低感度化

$P_i$ が $P_i'$ に変動し、それにより閉ループ入出力伝達関数 $T_i$ が $T_i'$ に変動したとする。

このとき

$$\frac{T_i' - T_i}{T_i'} S_i = \frac{P_i' - P_i}{P_i'} \quad (61)$$

$$S_i = \frac{1}{1 + P_i K_i} \quad (62)$$

という関係がある。 $S_i$ は感度関数と呼ばれる。(61)式より $|S_i(j\omega)|$ を小さくすれば、変動に対する感度を低くできることがわかる。しかし $S_i + T_i = 1$ という関係があるため、 $|S_i(j\omega)|$ を全ての周波域で小さくすることはできない。通常、 $W_{T_i}$ は高周波域を重視した重み関数であり、低感度化で問題となる周波域は低周波数である。この関係を利用し、 $S_i$ に低周波数で重みをかけた

$$\|\rho_i W_{S_i} S_i\|_{\infty} < 1 \quad (63)$$

を低感度化のための条件とする。 $\rho_i$ が大きければそれだけ低感度になることがわかる。

図3(c)において、 $T_L$ から $y_3$ への伝達関数 $G_{y_3 T_L}$ は

$$G_{y_3 T_L} = \frac{\lambda_1}{J} \frac{P_3}{1 + P_3 K_3} \quad (64)$$

であるため

$$\rho_3 W_{S_3} S_3 = V G_{y_3 T_L} \quad (65)$$

$$V = \frac{\lambda_1}{J} P_3 \rho_3 W_{S_3} \quad (66)$$

なる関係がある。 $|P_3(j\omega)|$ 、 $|\rho_3 W_{S_3}(j\omega)|$ は共に低周波域で大きいから、 $|V(j\omega)|$ も低周波域で大きくなる。すなわち、 $\rho_3$ が大きいほど比較的low周波域が問題となるステップ状外乱 $T_L$ が $y_3$ へ与える影響は小さくなる。

4.2.4 混合感度問題による補償器の設計

混合感度問題とは、(61)式を満足する範囲で(63)式の $\rho_i$ をできるだけ大きくする安定化補償器 $K_i$ を求めることである。つまり

$$\left\| \begin{bmatrix} \rho_i W_{S_i} S_i \\ W_{T_i} T_i \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (67)$$

を満足するような安定化補償器 $K_i$ を求めればよい。ここでは積分型補償器を得るために $P_i P_a (P_a = (s+a)/s)$ で $a$ は任意の正数)なる拡大系を用いる<sup>9)</sup>。このとき、混合感度問題における一般化制御対象 $G_i$ は次式のようになる(図5)。

$$G_i = \begin{bmatrix} \rho_i \widehat{W}_{S_i} P_a & -\widehat{W}_{S_i} P_i P_a \\ 0 & W_{T_i} P_i \\ P_a & -P_i P_a \end{bmatrix}, \quad \widehat{W}_{S_i} = W_{S_i} P_a^{-1} \quad (68)$$

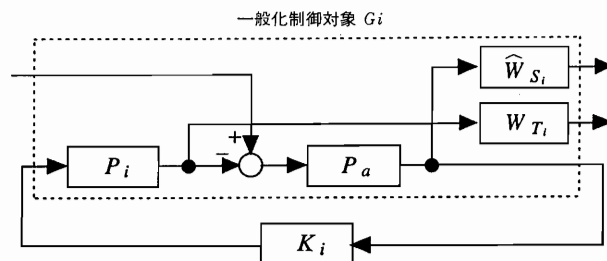


図5 混合感度問題の一般化制御対象

5. 補償器の設計例及びシミュレーション結果

5.1 H<sup>∞</sup>補償器の設計例

表1 各パラメータの公称値

1次抵抗	1.53 Ω
2次抵抗	2.14 Ω
1次自己インダクタンス	110 mH
2次自己インダクタンス	110 mH
相互インダクタンス	104 mH
慣性モーメント	0.024 kgm <sup>2</sup>
制動係数	6.4 × 10 <sup>-3</sup> Nms/rad

本稿で用いる誘導電動機は、0.75kWの4極3相かご形である。各パラメータの公称値を表1に示す。このとき、(32)~(34)式の係数はそれぞれ $a_1 = 21.055$ 、 $a_{21} = 6406.0$ 、 $a_{22} = 371.60$ 、 $a_{31} = 87.863$ 、 $a_{32} = 329.75$ となるため $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ は共に安定である。

2次抵抗が公称値の-5%~+5%の間を変動するとし、他のパラメータは-5%~+5%の間で変動するとした。またむだ時間は2[msec]とした。(60)式を満足するようにロバスト安定化のための重み関数 $W_{T_i}$ を

$$W_{T_1} = \frac{s+190}{460} \quad (69)$$

$$W_{T_2} = \frac{(s+120)(s+10000)}{1500000} \quad (70)$$

$$W_{T_3} = \frac{(s+60)(s+5000)}{850000} \quad (71)$$

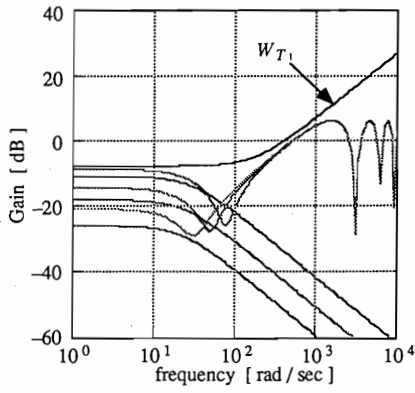
とした。様々な $\delta P_i$ と $W_{T_i}$ のボード線図を図6に示す。低周波域で低感度化を実現するため、重み関数を

$$W_{S_i} = \frac{1}{s} \quad (72)$$

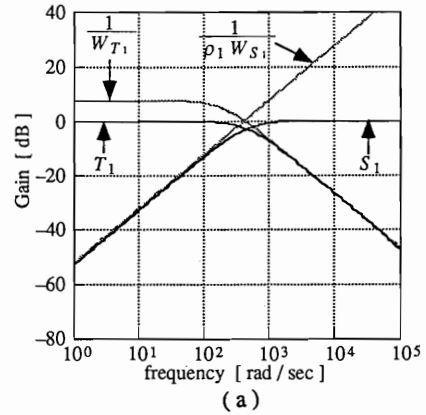
とした。(69)~(72)式を用いて(68)式一般化制御対象を求め、K. Glover & J. C. Doyleの方法<sup>10)</sup>で混合感度問題を解いた(PC-MATLAB<sup>11)</sup>を利用)。その結果 $\rho_1 = 418$ 、 $\rho_2 = 88$ 、 $\rho_3 = 153$ 程度まで大きくでき、得られた積分形補償器は

$$K_1 = \frac{9.5393 \times 10^7 (s+a_1)}{s (s+2.0784 \times 10^5)} \quad (73)$$

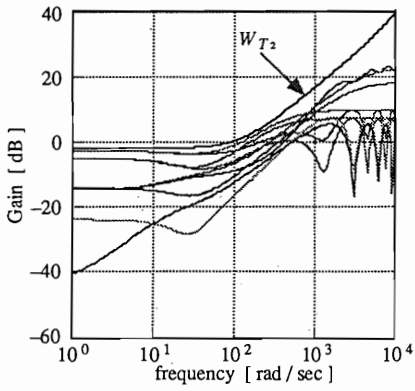




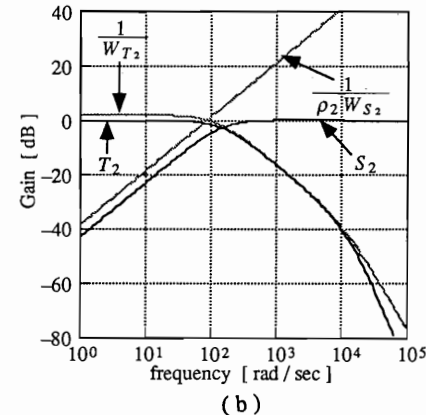
(a)



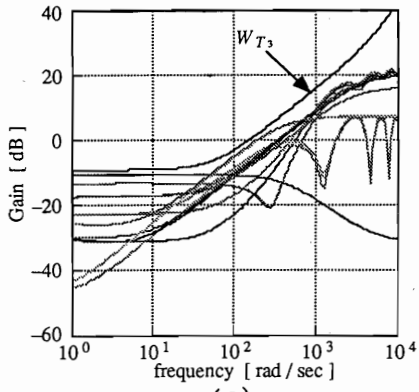
(a)



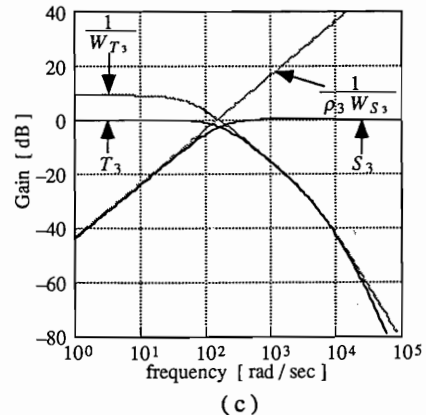
(b)



(b)



(c)



(c)

図7  $S_i, T_i, 1/W_{T_i}, 1/\rho_i W_{S_i}$  のボード線図

図6  $\delta_{P_i}$  と  $W_{T_i}$  のボード線図

$$K_2 = \frac{2.9110 \times 10^{10} (s^2 + a_{22}s + a_{21})}{s (s + 1.9242 \times 10^4) (s + 1.0315 \times 10^4)} \quad (74)$$

$$K_3 = \frac{2.5606 \times 10^{10} (s^2 + a_{32}s + a_{31})}{s (s + 3.0091 \times 10^4) (s + 5.2039 \times 10^3)} \quad (75)$$

であった。このときの  $S_i, T_i, 1/W_{T_i}, 1/\rho_i W_{S_i}$  のボード線図を図7に、 $G_{y_3 T_L}$  のボード線図を図8に示す。

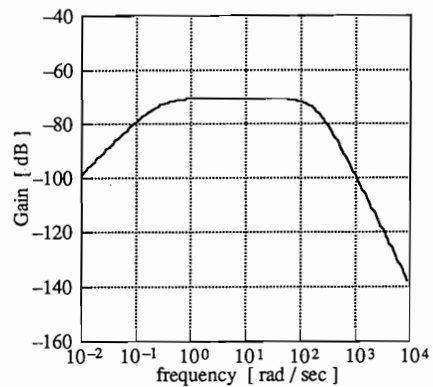


図8  $G_{y_3 T_L}$  のボード線図

5.2 計算機シミュレーション

提案した制御系の有効性を示すため、計算機シミュレーションを行った。(6)式をルンゲ・クッタ法で解くことにより誘導電動機を表現し、補償器を双一次変換で離散化した。ただしサンプリング周期は0.5[msec]とした。以下のシミュレーションでは  $t=0$  [sec] においてベクトル制御可能であると、各目標値を

$$\omega_r^* = \begin{cases} 1000 \text{ [rpm]} & (0 \leq t \leq 2) \\ 1000(3-t) \text{ [rpm]} & (2 \leq t \leq 4) \\ -1000 \text{ [rpm]} & (4 \leq t \leq 10) \end{cases},$$

$$i_{md}^* = 10 \text{ [A]}, \quad i_{mq}^* = 0 \text{ [A]}$$

とした。また、むだ時間は 1 [msec] とした。

図 9 に各パラメータが公称値の場合の応答を示す。 $\omega_r^*$  が大きく変化しても  $i_{md}$ ,  $i_{mq}$  は影響を受けていないことがわかる。すなわち動作点に関わらず、入出力は非干渉であることが確認できる。

パラメータが変動した場合 ( $r_2' = 1.5r_2$ ,  $L_s' = 0.95L_s$ ,  $L_r' = 1.05L_r$ ,  $M' = 0.95M$ ) を図 10 に示す。この場合も安定性は保たれているが、図 9 と比較して  $\omega_r$  が  $\omega_r^*$  に追従するまでの時間が長く、また  $\omega_r$  の過渡状態において  $i_{md}$  は応答が乱れている。これらは  $\Delta$  の影響と考えられる。しかしながら  $\omega_r$ ,  $i_{md}$  は  $\omega_r^*$ ,  $i_{md}^*$  に速やかに追従している。また図 4 (a) の制御系がかなり低感度に設計されているため、 $i_{mq}$  は  $\omega_r^*$  の変化の影響をほとんど受けていない。

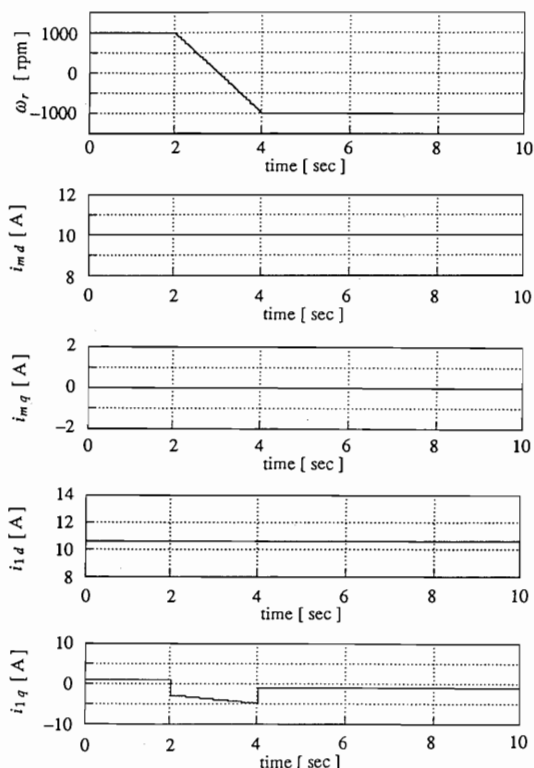


図 9 パラメータが公称値の場合 ( $T_L=0$ )

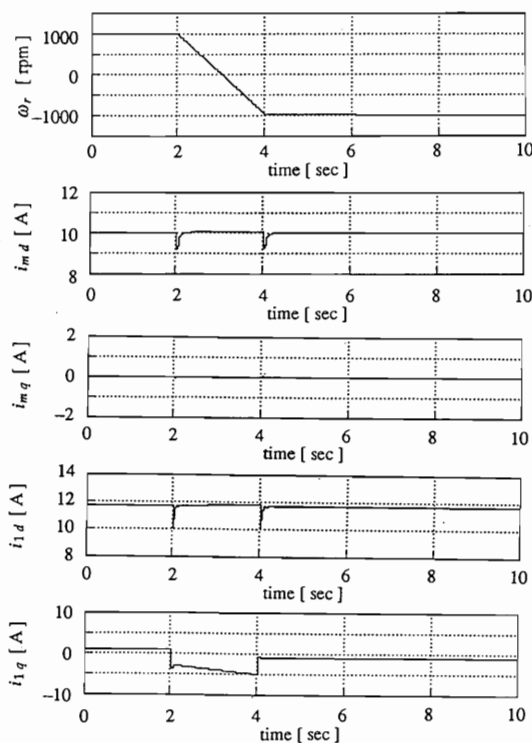


図 10 パラメータが変動した場合

$$(r_2' = 1.5r_2, \quad L_s' = 0.95L_s, \quad L_r' = 1.05L_r, \quad M' = 0.95M, \quad T_L=0)$$

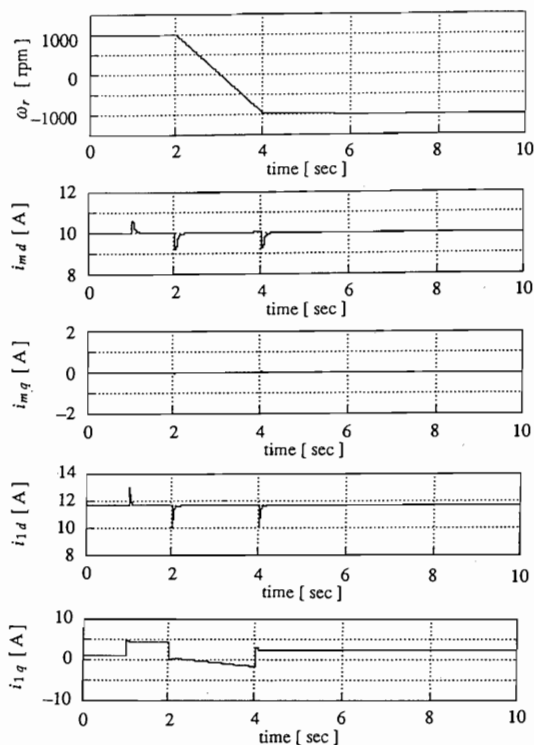


図 11 パラメータが変動した場合

$$(r_2' = 1.5r_2, \quad L_s' = 0.95L_s, \quad L_r' = 1.05L_r, \quad M' = 0.95M, \quad T_L = 20 \text{ [N]} (t \geq 1))$$

図11は、図10の条件下でさらに負荷トルクが加わった場合である。ただし、負荷トルクは  $T_L = 20[\text{N}]$  ( $t \geq 1$ ) とした。負荷トルクが加わった瞬間に  $i_{md}$  は乱れているが、速やかに  $i_{md}^*$  に追従している。また、 $\omega_r$ ,  $i_{mq}$  はほとんど負荷トルクの影響を受けていないことがわかる。

## 6. おわりに

本稿で扱った誘導電動機は3入力3出力の非線形なシステムであり、しかもパラメータ変動(特に2次抵抗の変動)、負荷トルクが外乱として現れるなどの問題をもつ。そこで、非線形性に対処するために入出力が非干渉となる厳密線形化を行い、この厳密線形化モデルを用いて、パラメータ変動、負荷トルクなどの不確かさに対処(ロバスト安定化, 低感度化)する  $H^\infty$  積分型補償器を設計した。

また、提案する制御系の有効性を示すために計算機シミュレーションを行い、動作点が大きく変化しても入出力が非干渉であること、パラメータ変動、負荷トルク、むだ時間にかかわらず安定性を保ち良好な結果が得られることを確認した。

従来、非線形システムの制御設計は困難であり、満足の結果が得られなかった。しかしながら、このような非線形システムに対して、微分幾何学的手法を基にした厳密線形化及び適切な線形補償器(例えば混合感度問題に対する  $H^\infty$  補償器)の設計を行うことが有効であると考えられる。パラメータ変動に対する大域的な安定性の問題など解決すべき課題も多いが今後検討していきたいと考えている。最後に、筆者の1人(森田)は、本研究に対して多くの御支援を賜った社内各位に、紙上を借りて感謝致します。

## 参考文献

- 1) 川田, 大場, 森田, 亀井, 井上: 誘導電動機の厳密線形化モデルに対する  $H^\infty$  制御の適用; 平成4年電気関係学会関西支部連合大会講演論文集, G106(1992)
- 2) 村田, 土谷, 武田: 状態フィードバックによる誘導電動機のベクトル制御について; 計測自動制御学会論文集, Vol.24 No.6, 596/602(1988)
- 3) 土屋, 江上: 現代制御工学; 産業図書
- 4) A. Isidori: Nonlinear Control Theory; An Introduction, 2nd edition, Springer Verlag, 1989
- 5) Y. Kuroe, Y. Yoneda: Design of A New Controller for Induction Motors Based on Exact Linearization; Proc-IECON'91, 621/626(1991)
- 6) I. J. Ha, E. G. Gilbert: A complete characterization of decoupling control laws for a general class of nonlinear systems; IEEE Trans., Automatic Control, vol. AC-31, 823/830(1986)
- 7) 古屋, 土谷: 誘導機状態方程式の線形化とその制御法; 平成4年電気学会全国大会, 594(1992)
- 8) 杉江: 状態空間法による  $H^\infty$  制御と制御系設計; 第41回システム制御情報講習会資料, 49/71(1991)
- 9) 原:  $H^\infty$  制御によるサーボ系設計, SICE 基礎講習会 -  $H^\infty$  制御入門 - テキスト, 49/71(1991)
- 10) R. Y. Chiang and M. G. Safonov: Robust-Control Toolbox, The Math Works, Inc.(1988)
- 11) K. Glover and J. C. Doyle: State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers that satisfy an  $H^\infty$ -Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity; Systems and Control Letters, Vol.11, 167/172(1988)